

ĐỊNH LƯỢNG ĐỘ RỐI VÀ VIỆN TẢI LƯỢNG TỬ VỚI TRẠNG THÁI THÊM BA VÀ BỐT MỘT PHOTON LÊN HAI MODE KẾT HỢP LẺ

Nguyễn Thị Duyên Hải¹
 Trương Minh Đức¹
 Hồ Sỹ Chương^{1,2}

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra trạng thái thêm ba bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ. Sau đó chúng tôi kiểm tra tính đan rối và định lượng độ rối của trạng thái mới này theo điều kiện đan rối bậc cao của Hillery-Zubairy và tiêu chuẩn Concurrence. Tiếp theo, chúng tôi sử dụng trạng thái mới này như một nguồn rối để thực hiện quá trình viễn tải lượng tử và đánh giá độ trung thực trung bình của quá trình này. Kết quả cho thấy rằng, trạng thái này là trạng thái bị rối và độ rối có thể đạt đến 90%. Thêm vào đó, độ trung thực trung bình quá trình viễn tải lượng tử đạt xấp xỉ lý tưởng khi các tham số được chọn một cách phù hợp.

Từ khóa: Tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy bậc cao; tiêu chuẩn Concurrence; viễn tải lượng tử; độ trung thực trung bình; định lượng độ rối.

1. Đặt vấn đề

Trạng thái kết hợp lần đầu tiên được Sudarshan đưa ra vào năm 1963 khi khảo sát tính chất chùm Laser [1]. Cũng trong năm đó, Glauber đã xây dựng các trạng thái riêng của toán tử hủy của dao động tử điều hòa, ông cho rằng các trạng thái đó đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu về quang lượng tử và gọi là các trạng thái kết hợp [2]. Theo sự phát triển của Quang học lượng tử, vào năm 1973, Dodonov và cộng sự đã đưa ra lý thuyết về trạng thái kết hợp chẵn và kết hợp lẻ [3], mãi cho đến năm 1992, hai trạng thái này đã được tạo ra bằng thực nghiệm. Một sự kiện đáng chú ý là vào năm 1991, hai nhà Vật lý Agarwal và Tara đã giới thiệu trạng thái kết hợp thêm photon [4] và chứng minh đó là trạng thái phi cổ điển. Đồng thời hai tác giả này cũng đề xuất cách tạo ra chúng trong thực nghiệm. Qua nhiều công trình nghiên cứu cho thấy rằng việc

thêm bớt photon vào một trạng thái có thể tạo ra những trạng thái mới mang những tính chất phi cổ điển mà trạng thái gốc không có hoặc kém hơn như tính chất nén, tính phân bố sub-Poisson, tính phản kết chùm, tính chất đan rối, ... Các trạng thái phi cổ điển mới đó cũng đã có những đóng góp quan trọng vào các nhiệm vụ lượng tử như viễn tải lượng tử [5,6], truyền thông lượng tử.

Sau đây chúng tôi đề xuất trạng thái hai mode kết hợp lẻ thêm ba bớt một photon. Trạng thái này được định nghĩa như sau

$$|\psi\rangle_{ab} = N_{ab}(\hat{a}^{\dagger 3} + \hat{b}) \times (|\alpha\rangle_a |\beta\rangle_b - |\beta\rangle_a |\alpha\rangle_b), \quad (1)$$

trong đó \hat{a}^{\dagger} là toán tử sinh đối với mode a , \hat{b} là toán tử hủy đối với mode b , N_{ab} là hệ số chuẩn hóa có dạng

¹Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế

²Trường Đại học Đồng Nai
 Email: tmd2009@gmail.com
 hosichuong@gmail.com

$$\begin{aligned}
N_{\alpha\beta} = & \left[|\alpha|^6 + |\beta|^6 + 9|\alpha|^4 + 9|\beta|^4 \right. \\
& + 19|\alpha|^2 + 2\text{Re}(\alpha^3\beta + \beta^3\alpha) \\
& + 19|\beta|^2 + 12 - \exp(-|\alpha - \beta|^2) \\
& \times (\alpha^{*3}\beta^3 + \alpha^3\beta^{*3} + 9\alpha^{*2}\beta^2 \\
& + 9\alpha^2\beta^{*2} + 19\alpha^*\beta + 19\alpha\beta^* \\
& \left. + 2\text{Re}[\alpha^3\beta + \beta^3\alpha] + 12) \right]^{-1/2}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Trong không gian Fock, trạng này được viết

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_{ab} = & N_{\alpha,\beta} e^{-\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^m}{\sqrt{n!m!}} \\
& \times \left[\sqrt{(n+1)(n+2(n+3))} |n+3, m\rangle_{ab} \right. \\
& - \sqrt{(m+1)(m+2)(m+3)} |m+3, n\rangle_{ab} \\
& \left. + \sqrt{m} |n, m-1\rangle_{ab} - \sqrt{n} |m, n-1\rangle_{ab} \right]. \quad (3)
\end{aligned}$$

Sau khi xác định được trạng thái mới $|\psi\rangle_{ab}$, chúng tôi tiến hành kiểm tra tính chất đan rối và định lượng độ rối của trạng thái này.

2. Khảo sát tính chất đan rối của trạng thái thêm ba bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ

$$\begin{aligned}
R_H(l, p) = & |N_{\alpha\beta}|^2 \times \left\{ \left[|\alpha|^{2(l+3)} |\beta|^{2p} + |\alpha|^{2p} |\beta|^{2(l+3)} + (6l+9)(|\alpha|^{2(l+2)} |\beta|^{2p} + |\alpha|^{2p} |\beta|^{2(l+2)}) \right. \right. \\
& + (15l^2 + 30l + 18)(|\alpha|^{2(l+1)} |\beta|^{2p} + |\alpha|^{2p} |\beta|^{2(l+1)}) + (20l^3 + 30l^2 + 22l + 6)(|\alpha|^{2l} |\beta|^{2p} \\
& + |\alpha|^{2p} |\beta|^{2l}) + (15l^4 + 3l^2)(|\alpha|^{2(l-1)} |\beta|^{2p} + |\alpha|^{2p} |\beta|^{2(l-1)}) + (6l^5 - 15l^4 + 12l^3 - 3l^2) \\
& \times (|\alpha|^{2(l-2)} |\beta|^{2p} + |\alpha|^{2p} |\beta|^{2(l-2)}) + (l^6 - 6l^5 + 13l^4 - 12l^3 + 4l^2)(|\alpha|^{2(l-3)} |\beta|^{2p} \\
& \left. + |\alpha|^{2p} |\beta|^{2(l-3)}) \right] + \left[|\alpha|^{2l} + 3l|\alpha|^{2(l-1)} + (3l^2 - 3l)|\alpha|^{2(l-2)} + (l^3 - 3l^2 + 2l)|\alpha|^{2(l-3)} \right] \\
& \times \left(\alpha^3\beta |\beta|^{2p} + \alpha^{*3}\beta^* |\beta|^{2p} \right) + |\alpha|^{2l} |\beta|^{2(p+1)} + \left[|\beta|^{2l} + 3l|\beta|^{2(l-1)} + (3l^2 - 3l)|\beta|^{2(l-2)} \right. \\
& \left. + (l^3 - 3l^2 + 2l)|\beta|^{2(l-3)} \right] \left(\beta^3\alpha |\alpha|^{2p} + \beta^{*3}\alpha^* |\alpha|^{2p} \right) + |\beta|^{2l} |\alpha|^{2(p+1)} - 2\text{Re} \left[\alpha^{*(l+3)} \beta^{(l+3)} \right. \\
& + (6l+9)\alpha^{*(l+2)} \beta^{(l+2)} + (15l^2 + 30l + 18)\alpha^{*(l+1)} \beta^{(l+1)} + (20l^3 + 30l^2 + 22l + 6)\alpha^* \beta^l \\
& + (15l^4 + 3l^2)\alpha^{*(l-1)} \beta^{(l-1)} + (6l^5 - 16l^4 + 12l^3 - 3l^2)\alpha^{*(l-2)} \beta^{(l-2)} + (l^6 - 6l^5 + 13l^4 - 12l^3 \\
& \left. + 4l^2)\alpha^{*(l-3)} \beta^{(l-3)} \right] \alpha^p \beta^{*p} + \left(\alpha^{*l} \beta^l + 3l\alpha^{*(l-1)} \beta^{(l-1)} + (3l^2 - 3l)\alpha^{*(l-2)} \beta^{(l-2)} + \alpha^{*(l-3)} \beta^{(l-3)} \right) \\
& \left. \times (l^3 - 3l^2 + 2l) \left(\alpha^{(p+1)} \beta^3 \beta^{*p} + \alpha^{*3} \alpha^p \beta^{*(p+1)} \right) + \alpha^* \alpha^{(p+1)} \beta^l \beta^{*(p+1)} \right] e^{-|\alpha-\beta|^2} \left. \right\} - |N_{\alpha,\beta}|^4 |A|^2, \quad (6)
\end{aligned}$$

2.1. Kiểm tra tính chất đan rối bằng tiêu chuẩn Hillery-Zubairy bậc cao

Hillery và Zubairy đã đưa ra điều kiện dò tìm đan rối lần đầu tiên năm 2006 [7], bởi một lớp bất đẳng thức dựa trên hệ thức bất định Heisenberg và bất đẳng thức Schwars. Các tiêu chuẩn này có thể tiến hành để dò tìm đan rối trong phòng thí nghiệm và áp dụng đối với hệ lớn hơn hai mode. Đối với hệ hai mode, tiêu chuẩn để trạng thái thỏa mãn điều kiện đan rối của Hillery-Zubairy bậc cao là

$$\left\langle \hat{a}^{\dagger l} \hat{a}^l \hat{b}^{\dagger p} \hat{b}^p \right\rangle < \left\langle \hat{a}^{\dagger} \hat{b}^{\dagger p} \right\rangle^2. \quad (4)$$

Để đơn giản cho quá trình khảo sát chúng tôi đưa biểu thức về dạng

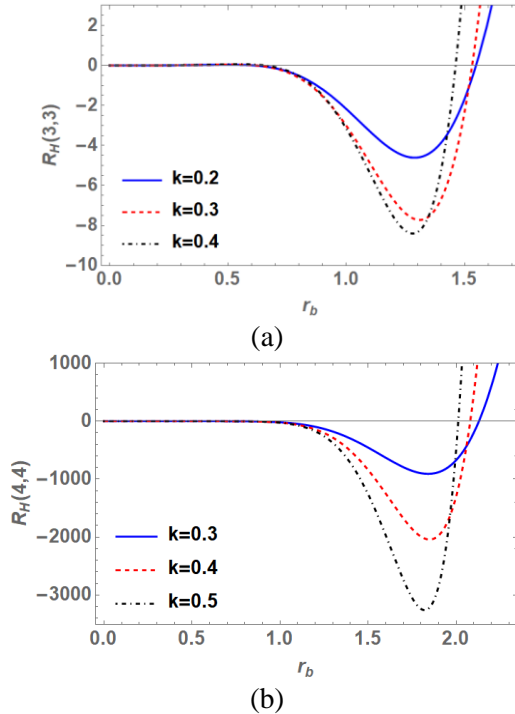
$$R_H = \left\langle \hat{a}^{\dagger l} \hat{a}^l \hat{b}^{\dagger p} \hat{b}^p \right\rangle - \left\langle \hat{a}^{\dagger} \hat{b}^{\dagger p} \right\rangle^2, \quad (5)$$

trong đó R_H gọi là tham số đan rối, trạng thái thêm ba bớt một photon cho hai mode kết hợp lẻ sẽ thỏa mãn tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy bậc cao nếu $R_H < 0$ và ngược lại. Sau quá trình tính toán chúng tôi thu được tham số R_H của trạng thái thêm ba bớt một như sau

trong đó A được xác định là

$$A = \left\{ \left[|\alpha|^6 + 3(l+3)|\alpha|^4 + 3(l+3)(l+2)|\alpha|^2 + (l+3)(l+2)(l+1) \right] \alpha^l \beta^{*p} + (\alpha^3 + \beta^*) \alpha^l \beta^{*p} \right. \\ + \alpha^{(l-3)} \beta^{*(p+1)} \left[|\alpha|^6 + 3l|\alpha|^4 + 3l(l-1)|\alpha|^2 + l(l-2)(l-1) \right] + \left[|\beta|^6 + 3(l+3)|\beta|^4 \right. \\ + 3(l+3)(l+2)|\beta|^2 + (l+3)(l+2)(l+1) \left. \right] \beta^l \alpha^{*p} + (\beta^3 + \alpha^*) \beta^l \alpha^{*p} \alpha + \left(|\beta|^6 + 3l|\beta|^4 \right. \\ + 3l(l-1)|\beta|^2 + l(l-2)(l-1) \left. \right) \beta^{(l-3)} \alpha^{*(p+1)} - 2 \operatorname{Re} \left[(\alpha^{*3} \beta^3 + 3(l+3) \alpha^{*2} \beta^2 + 3(l+3) \right. \\ \times (l+2) \alpha^* \beta + (l+3)(l+2)(l+1) \left. \right) \beta^l \beta^{*p} + \alpha \beta^l \beta^{*p} (\beta^3 + \beta^*) + (\alpha^{*3} \beta^3 + 3l \alpha^{*2} \beta^2 + 3l(l-1) \\ \times \alpha^* \beta + l(l-2)(l-1) \left. \right) \beta^{(l-3)} \beta^{*(p+1)} \left. \right] e^{-|\alpha-\beta|^2} \left. \right\}.$$

Thực hiện khảo sát R_H theo biên độ r_b và pha dao động φ_b với $a = r_a \exp(i\varphi_a)$, $b = r_b \exp(i\varphi_b)$ ta được các đồ thị như sau.



Hình 1: Đồ thị khảo sát sự phụ thuộc của $R_H(3,3)$ và $R_H(4,4)$ vào r_b trong các trường hợp k khác nhau ($k = r_a / r_b$) và

$$\varphi_a = \varphi_b = \pi / 2$$

Từ các đồ thị ở hình 1a và 1b cho thấy trạng thái thêm ba bớt một photon lên hai mode kết hợp sẽ xuất hiện các vùng rói ($r_b < 0$) theo điều kiện đan rói bậc cao của Hillery-Zubairy. Cụ thể, hình 1a

là các đồ thị của tham số rói bậc 3 đối với cả hai mode theo biên độ kết hợp của mode b (r_b) ứng với các trường hợp $k = \{0, 2; 0, 3; 0, 4\}$. $R_H(3;3)$ xuất hiện giá trị âm bắt đầu từ vị trí $r_b \approx 0,5$ và kết thúc ở vị trí $r_b \approx 1,5$ đồng thời khi $k \approx 0,4$ đồ thị có giá trị cực tiểu nhỏ nhất. Hình 1b là các đồ thị của tham số rói bậc 4 đối với cả hai mode theo biên độ kết hợp của mode b (r_b) ứng với các trường hợp $k = \{0, 3; 0, 4; 0, 5\}$. $R_H(4;4)$ xuất hiện giá trị âm bắt đầu từ vị trí $r_b \approx 0,75$ và kết thúc ở vị trí $r_b \approx 2$ đồng thời đường có điểm cực tiểu nhỏ nhất khi $k \approx 0,5$. Bên cạnh đó ta có thể thấy khi R_H càng âm thì vùng rói càng mở rộng.

Như vậy, các kết quả khảo sát tính đan rói trên cho thấy rằng việc thêm ba và bớt một photon lên trạng thái hai mode kết hợp sẽ làm xuất hiện tính chất đan rói trong một số miền nhỏ của biên độ kết hợp. Khi biên độ kết hợp lớn tính chất đan rói của trạng thái mới này mất đi và trở về tính chất vốn có của trạng thái kết hợp.

2.2. Định lượng độ rói bằng tiêu chuẩn Concurrence

Để kiểm tra mức độ đan rói của trạng thái mới này, chúng tôi đã sử dụng tiêu chuẩn định lượng độ rói Concurrence hay tiêu chuẩn độ đồng quy. Theo tiêu chuẩn này, nếu gọi trạng thái $|\psi\rangle_{ab}$ với hai mode a, b có dạng

$|\psi\rangle_{ab} = N(\mu|\eta\rangle_a|\gamma\rangle_b + \gamma|\xi\rangle_a|\delta\rangle_b)$, (7)
 trong đó N là hệ số chuẩn hóa; μ, γ là các số phức; $|h\tilde{n}_a\rangle, |x\tilde{n}_a\rangle, |g\tilde{n}_b\rangle, |d\tilde{n}_b\rangle$ là các trạng thái đã được chuẩn hóa của hai mode a và b . Độ đồng quy được định nghĩa bằng biểu thức

$$C = \frac{2|m||u|\sqrt{(1-|P_1|^2)(1-|P_2|^2)}}{|m|^2 + |u|^2 + \text{Re}[m^*uP_1P_2^*]}. \quad (8)$$

Trạng thái $|\psi\rangle_{ab}$ thỏa mãn tiêu chuẩn độ đồng quy nếu $C > 0$, C càng tiến gần tới 1 thì trạng thái có độ rối càng tốt và đạt độ rối lý tưởng khi $C = 1$.

Trạng thái thêm ba bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ biểu diễn về trạng thái (7) như sau

$$|\psi\rangle_{ab} = N_{\alpha\beta}(\sqrt{N_1}|\eta\rangle_a|\beta\rangle_b + \sqrt{N_2}|\xi\rangle_a|\alpha\rangle_b), \quad (9)$$

trong đó $\mu = \sqrt{N_1}; \nu = \sqrt{N_2}$. Từ đó tiêu chuẩn độ đồng quy cho trạng thái mới được viết lại

$$C = \frac{2\sqrt{N_1N_2}\sqrt{(1-|P_1|^2)(1-|P_2|^2)}}{|N_1| + |N_2| + 2\text{Re}[\sqrt{N_1N_2}P_1P_2^*]}. \quad (10)$$

Sau quá trình biến đổi và tính toán chúng tôi thu được

$$P_2 = \langle \alpha | \beta \rangle_b = \sqrt{x} = e^{|\alpha-\beta|^2/2};$$

$$P_1 = \langle \eta | \xi \rangle_a = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{N_1^*N_2}}(\alpha^* \beta^3 + 9\alpha^* \beta^2 + 18\alpha^* \beta + 6 + \alpha\beta^3 + \alpha^3 \beta^* + \alpha\beta^*);$$

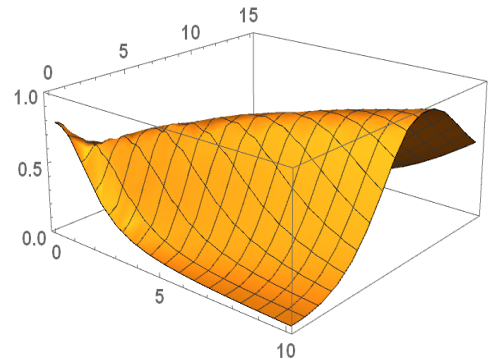
$$N_1 = |\alpha|^6 + 9|\alpha|^4 + 18|\alpha|^2 + 6 + \alpha^3\beta + \alpha^* \beta^3 + |\beta|^2;$$

$$N_2 = |\beta|^6 + 9|\beta|^4 + 18|\beta|^2 + 6 + \alpha\beta^3 + \alpha^* \beta^3 + |\alpha|^2.$$

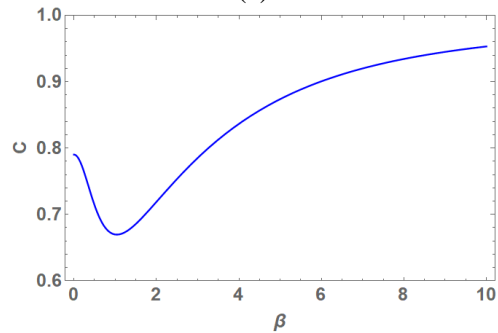
Thay các kết quả trên vào biểu thức (10) và xét trường hợp α, β là thực ta

được biểu thức độ đồng quy của trạng thái thêm ba bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ như sau

$$C = 2\sqrt{N_1N_2}(1-x)^{1/2} \left(1 - x / (N_1N_2) \times (\alpha^3\beta^3 + 9\alpha^2\beta^2 + 19\alpha\beta + 6 + \alpha\beta^3 + \alpha^3\beta^2)^{1/2} \times (N_1 + N_2 - 2x(\alpha^3\beta^3 + 9\alpha^2\beta^2 + 19\alpha\beta + 6 + \alpha\beta^3 + \alpha^3\beta))^{-1}\right) \quad (11)$$



(a)



(b)

Hình 2: Đồ thị định lượng độ rối của trạng thái thêm ba bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ bằng tiêu chuẩn độ đồng quy (Concurrence)

Sau khi có kết quả (11), chúng tôi sử dụng phương pháp tính số và vẽ đồ thị để đánh giá mức độ đan rối của trạng thái thêm ba bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ. Hình 2a là đồ thị 3D của hàm C theo các biến α và β , từ đồ thị này ta có thể thấy khi α và β xấp xỉ nhau và cố định thì C đạt đến giá trị cực trị. Vì vậy chúng tôi chọn tham số $k = \alpha / \beta$ xấp xỉ một đơn vị để tiến hành khảo sát sự phụ

thuộc của C theo biên độ kết hợp β như hình 2b. Ở hình 2b, chúng tôi chọn $k=0.95$, đồ thị này cho thấy rằng, khi β tăng lên rất lớn thì C tiến đến gần một đơn vị. Như vậy chúng ta có thể thấy rằng, theo tiêu chuẩn độ đồng quy, trạng thái thêm ba bớt một photon lên hai mode kết hợp sẽ luôn bị rối và đạt độ rối gần lý tưởng khi các biên độ kết hợp α, β xấp xỉ nhau và có giá trị rất lớn.

3. Áp dụng trạng thái mới vào viễn tải lượng tử

3.1. Mô hình viễn tải lượng tử

Ở đây chúng tôi sử dụng mô hình viễn tải lượng tử sử dụng phép đo các thành phần trực giao [8, 9]. Theo đó, bên gửi thông tin là Alice và bên nhận thông tin là Bob. Trạng thái thêm ba và bớt một photon lên hai mode kết hợp sẽ có hai mode a và b, trong đó mode a được đưa tới Alice và mode b được đưa tới Bob, trạng thái được viễn tải là trạng thái kết hợp $|\gamma\rangle_c$ tương ứng với mode c được đưa vào Alice.

Tại nơi gửi thông tin, Alice sẽ thực hiện việc tổ hợp trạng thái $|\gamma\rangle_c$ và $|\psi\rangle_{a,b}$ trở thành một trạng thái ba mode có dạng

$$|\psi\rangle_{abc} = N_{\alpha,\beta} e^{-\frac{(|\alpha|^2+|\beta|^2)}{2}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^m}{\sqrt{n!m!}} \times \left[\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)} |n+3, m\rangle_{ab} |\gamma\rangle_c - \sqrt{(m+1)(m+2)(m+3)} |m+3, n\rangle_{ab} |\gamma\rangle_c + \sqrt{m} |n, m-1\rangle_{ab} |\gamma\rangle_c - \sqrt{n} |m, n-1\rangle_{ab} |\gamma\rangle_c \right]. \quad (12)$$

Alice dùng phép đo Bell tổ hợp trên hai mode a và c để đo thông tin về mức độ đan rối giữa $|\gamma\rangle_c$ và $|\psi\rangle_{a,b}$ dựa trên hai mode a và c. Phép đo này hình thành nên một trạng thái rối phức hợp gọi là trạng

thái Bell. Trạng thái Bell được biểu diễn qua trạng thái Fock như sau

$$|B(X, P)\rangle_{ca} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{D}_c(2A) |k, k\rangle_{ac}. \quad (13)$$

Khi phép đo tổ hợp hoàn thành, trạng thái này sụp đổ. Do Bob và Alice cùng chia sẻ trạng thái rối nên Bob sẽ thu được trạng thái như sau

$$|\psi\rangle_B = \frac{2N_{\alpha,\beta}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(|\alpha|^2+|\beta|^2)}{2}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^m}{\sqrt{n!m!}} \frac{e^{A^* \gamma - A \gamma^*}}{e^{-|\gamma-2A|^2/2}} \times \left[\frac{(\gamma-2A)^{n+3}}{\sqrt{n!}} |m\rangle_b - \frac{(\gamma-2A)^{m+3}}{\sqrt{m!}} |n\rangle_b + \frac{\sqrt{m}(\gamma-2A)^n}{\sqrt{n!}} |m-1\rangle_b - \frac{\sqrt{n}(\gamma-2A)^m}{\sqrt{m!}} |n-1\rangle_b \right]. \quad (14)$$

Lúc này, bên Bob tồn tại trạng thái ứng với mode b chứa các thông tin về mode c. Bob sẽ thực hiện phép dịch chuyển $\hat{D}(g2A)$ để xây dựng lại trạng thái được viễn tải ban đầu $|\gamma\rangle_c$, với g là hệ số điều khiển mà Bob dùng để hoàn thiện độ trung thực của quá trình viễn tải. Trạng thái cuối cùng thu được trong quá trình viễn tải sẽ là

$$|\psi\rangle_{out} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_{\alpha,\beta} e^{-\frac{(|\alpha|^2+|\beta|^2)}{2}} \times \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^m}{\sqrt{n!m!}} e^{A^* \gamma - A \gamma^* - |\gamma-2A|^2/2} \times \left[\frac{1}{\sqrt{n!}} (\gamma-2A)^{n+3} \hat{D}(g2A) |m\rangle_b - \frac{1}{\sqrt{m!}} (\gamma-2A)^{m+3} \hat{D}(g2A) |n\rangle_b + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n!}} (\gamma-2A)^n \hat{D}(g2A) |m-1\rangle_b - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m!}} (\gamma-2A)^m \hat{D}(g2A) |n-1\rangle_b \right]. \quad (15)$$

Đến thời điểm này, quá trình viễn tải đã hoàn thành và chúng ta cần đánh giá kết quả quá trình viễn tải này qua độ thực trung bình.

3.2. Độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải lượng tử

Chúng ta sẽ đánh giá mức độ thành công của quá trình viễn tải dựa vào độ trung thực trung bình F_{av} , một quá trình viễn tải được xem là thành công khi

$${}_m \langle \psi | \psi \rangle_{out} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_{\alpha,\beta} e^{-\frac{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2}{2}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^m}{\sqrt{n!m!}} e^{A^* \gamma - A \gamma^* - |\gamma - 2A|^2 / 2} \left[\frac{(\gamma - 2A)^{n+3}}{\sqrt{n!}} \langle \gamma | \hat{D}(g2A) | m \rangle_b - \frac{(\gamma - 2A)^{m+3}}{\sqrt{m!}} \langle \gamma | \hat{D}(g2A) | n \rangle_b + \frac{\sqrt{m}(\gamma - 2A)^n}{\sqrt{n!}} \langle \gamma | \hat{D}(g2A) | m-1 \rangle_b - \frac{\sqrt{n+1}(\gamma - 2A)^m}{\sqrt{m!}} \langle \gamma | \hat{D}(g2A) | n-1 \rangle_b \right] \quad (17)$$

Bằng cách thay kết quả ở phương trình (17) vào phương trình (16) và sau đó

$0.5 \leq F_{av} \leq 1$ và quá trình viễn tải được đánh giá là hoàn hảo nếu $F_{av} = 1$.

Độ trung thực trung bình trong quá trình viễn tải lượng tử [8-10] được xác định theo công thức sau

$$F_{av} = \int | {}_{in} \langle \psi | \psi \rangle_{out} |^2 d^2 A. \quad (16)$$

Đối với trạng thái thêm ba bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ ta có

rút gọn ta thu được kết quả như biểu thức sau đây

$$F_{av} = \int | {}_{in} \langle \psi | \psi \rangle_{out} |^2 2d^2 A = \frac{4}{\pi} | N_{\alpha,\beta} |^2 e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2} \sum_{n,m,l,p=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^m \alpha^{*l} \beta^{*p}}{n!m!l!p!} \int e^{-|\chi|^2 - |\Omega|^2} d^2 A$$

$$\times \left[\chi^{n+3} \Omega^{*m} \chi^{*l+3} \Omega^p + p \chi^{n+3} \Omega^{*m} \chi^{*l} \Omega^{p-1} - \chi^{n+3} \Omega^{*m} \chi^{*p+3} \Omega^l - l \chi^{n+3} \Omega^{*m} \chi^{*p} \Omega^{l-1} \right.$$

$$+ m \chi^n \Omega^{*m-1} \chi^{*l+3} \Omega^p + mp \chi^n \Omega^{*m-1} \chi^{*l} \Omega^{p-1} - m \chi^n \Omega^{*m-1} \chi^{*p+3} \Omega^l - ml \chi^n \Omega^{*m-1} \chi^{*p} \Omega^{l-1}$$

$$- \chi^{m+3} \Omega^{*n} \chi^{*l+3} \Omega^p - p \chi^{m+3} \Omega^{*n} \chi^{*l} \Omega^{p-1} + \chi^{m+3} \Omega^{*n} \chi^{*p+3} \Omega^l + l \chi^{m+3} \Omega^{*n} \chi^{*p} \Omega^{l-1}$$

$$\left. - n \chi^m \Omega^{*n-1} \chi^{*l+3} \Omega^p - np \chi^m \Omega^{*n-1} \chi^{*l} \Omega^{p-1} + n \chi^m \Omega^{*n-1} \chi^{*p+3} \Omega^l + nl \chi^m \Omega^{*n-1} \chi^{*p} \Omega^{l-1} \right], \quad (18)$$

trong đó $\chi = \gamma - 2A$ và $\Omega = \gamma - g2A$. Biểu thức (18) cho biết độ trung thực trung bình dưới dạng tổng quát, với g là hệ số điều khiển Bob dùng để hoàn thiện

độ trung thực của quá trình viễn tải. Ta chọn trường hợp $g=0$ và thực hiện các bước biến đổi thu được biểu thức độ trung thực trung bình có dạng

$$F_{av} = \frac{| N_{\alpha,\beta} |^2}{\pi} e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2 - |\gamma|^2} \sum_{n,m,l,p=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^m \alpha^{*l} \beta^{*p}}{n!m!l!p!} \int \left[\chi^{n+1} \gamma^{*m} \chi^{*l+1} \gamma^p + p \chi^{n+3} \gamma^{*m} \chi^{*l+3} \gamma^{p-1} \right.$$

$$- \chi^{n+3} \gamma^{*m} \chi^{*p+3} \gamma^l - l \chi^{n+3} \gamma^{*m} \chi^{*p} \gamma^{l-1} + m \chi^n \gamma^{*(m-1)} \chi^{*l+3} \gamma^p + mp \chi^n \gamma^{*(m-1)} \chi^{*l} \gamma^{p-1}$$

$$- m \chi^n \gamma^{*(m-1)} \chi^{*p+3} \gamma^l - ml \chi^n \gamma^{*(m-1)} \chi^{*p} \gamma^{l-1} - \chi^{m+3} \gamma^{*n} \chi^{*l+3} \gamma^p - p \chi^{m+3} \gamma^{*n} \chi^{*l} \gamma^{p-1}$$

$$+ \chi^{m+3} \gamma^{*n} \chi^{*p+3} \gamma^l + l \chi^{m+3} \gamma^{*n} \chi^{*p} \gamma^{l-1} - n \chi^m \gamma^{*(n-1)} \chi^{*l+3} \gamma^p - np \chi^m \gamma^{*(n-1)} \chi^{*l} \gamma^{p-1}$$

$$\left. + n \chi^m \gamma^{*(n-1)} \chi^{*p+3} \gamma^l + nl \chi^m \gamma^{*(n-1)} \chi^{*p} \gamma^{l-1} \right] e^{-|\chi|^2} d^2 \chi. \quad (19)$$

Thực hiện các phép biến đổi ta thu được

kết quả cuối cùng của độ thực trung bình

$$\begin{aligned}
 F_{av} = & |N_{\alpha,\beta}|^2 e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2 - |\gamma|^2} \left\{ \sum_{n,m,p=0}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{2n} \beta^m \beta^{*p} \gamma^{*m} \gamma^p}{n!m!p!} (n+1)(n+2)(n+3) - \frac{|\alpha|^{n+m} \beta^m \beta^{*p} \gamma^{*n} \gamma^p}{n!m!p!} \right. \right. \\
 & \times (m+1)(m+2)(m+3) \left. \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha^n \beta^m \alpha^{*1} \beta^{*(n+3)} \gamma^{*m} (\gamma)^{l-1}}{n!m!(l-1)!} - \frac{\alpha^n \beta^m \alpha^{*1} \beta^{*(m+3)} \gamma^{*n} (\gamma)^{l-1}}{n!m!(l-1)!} \right] \right. \right. \\
 & + \sum_{l,p=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha^l \beta^m \alpha^{*(l+3)} \beta^{*p} \gamma^{*(m-1)} \gamma^p}{(m-1)!l!p!} - \frac{\alpha^l \beta^m \alpha^{*(p+3)} \beta^{*p} \gamma^{*(m-1)} \gamma^l}{(m-1)!l!p!} \right] + \sum_{l,p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha^n |\beta|^{2p+3} \alpha^{*l} \gamma^{*(n-1)} (\gamma)^l}{(n-1)!l!p!} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\alpha^n \beta^{l+3} \beta^{*p} \alpha^{*l} \gamma^{*(n-1)} (\gamma)^p}{(n-1)!l!p!} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m,p=1}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{2n} \beta^m \beta^{*p} \gamma^{*(m-1)} (\gamma)^{(p-1)}}{n!(m-1)!(p-1)!} - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n,p=1}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^m \alpha^{*m} \beta^{*p} \gamma^{*n-1} (\gamma)^{p-1}}{(n-1)!m!(p-1)!} \right] \right\}. \tag{20}
 \end{aligned}$$

Để việc khảo sát được thuận lợi độ trung thực trung bình F_{av} được viết lại hơn, chúng tôi đặt $|\beta| = |\gamma| = k|\alpha|$, lúc này như sau

$$\begin{aligned}
 F_{av} = & N_{\alpha\beta} e^{-|\alpha|^2 - 2k^2|\alpha|^2} \\
 & \times \left\{ \sum_{n,m,p,l=0}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{2n} (k|\alpha|)^{2m+2p}}{n!m!p!} (n+1)(n+2)(n+3) - \frac{|\alpha|^{n+m} (k|\alpha|)^{m+n+2p}}{n!m!p!} (m+1)(m+2)(m+3) \right. \right. \\
 & + \frac{|\alpha|^{n+l} (k|\alpha|)^{2m+n+l}}{n!m!l!} (m+1)(m+2)(m+3) - \frac{|\alpha|^{n+l} (k|\alpha|)^{2m+n+l}}{n!m!l!} (n+1)(n+2)(n+3) \\
 & + \frac{|\alpha|^{2n+3} (k|\alpha|)^{2m+2p-1}}{n!m!(p-1)!} - \frac{|\alpha|^{n+m+3} (k|\alpha|)^{n+m+2p-1}}{n!m!(p-1)!} + \frac{|\alpha|^{n+l} (k|\alpha|)^{n+2m+l+2}}{n!m!(l-1)!} - \frac{|\alpha|^{n+l} (k|\alpha|)^{n+2m+l+2}}{n!m!(l-1)!} \tag{21} \\
 & + \frac{|\alpha|^{2l+3} (k|\alpha|)^{2m+2p-1}}{(m-1)!l!p!} - \frac{|\alpha|^{l+p+3} (k|\alpha|)^{2m+l+2p}}{(m-1)!l!p!} + \frac{|\alpha|^{n+l} (k|\alpha|)^{n+l+2p+2}}{(n-1)!l!p!} + \frac{|\alpha|^{n+l} (k|\alpha|)^{n+l+2p+2}}{(n-1)!l!p!} \\
 & \left. \left. + \frac{|\alpha|^{2n} (k|\alpha|)^{2m+2p-2}}{(m-1)!n!(p-1)!} - \frac{|\alpha|^{n+m} (k|\alpha|)^{n+l+2p+2}}{m!(n-1)!(p-1)!} + \frac{|\alpha|^{n+l} (k|\alpha|)^{n+2m+l-2}}{(n-1)!m!(l-1)!} - \frac{|\alpha|^{n+l} (k|\alpha|)^{n+2m+l-2}}{n!(m-1)!(l-1)!} \right] \right\},
 \end{aligned}$$

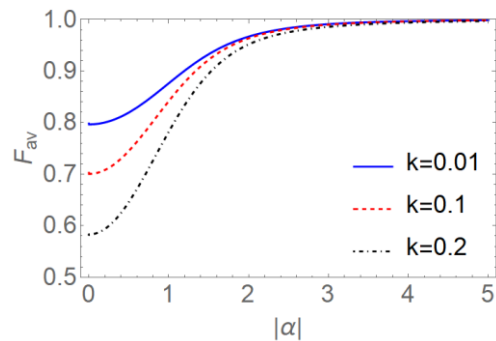
trong đó hệ số $N_{\alpha\beta}$ được xác định là

$$\begin{aligned}
 N_{\alpha\beta}^2 = & [\alpha^6(1+k^6) + (9k^4 + 9 + 2k + 2k^3)\alpha^4 \\
 & + (19+19k^2)\alpha^2 + 12 - (2k^3\alpha^6 + 18k^2\alpha^4 \\
 & + 2k\alpha^4 + 2k^3\alpha^4 + 12) \times \exp(-|\alpha - k\alpha|^2)]^{-1}.
 \end{aligned}$$

Từ kết quả (21), chúng tôi tiến hành vẽ đồ thị sự phụ thuộc của F_{av} vào biên độ kết hợp $|\alpha|$ như hình 3 để đánh giá về quá trình viễn tải lượng tử với nguồn rối là trạng thái thêm ba và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ.

Từ các đồ thị ở hình 3, ta thấy rằng quá trình viễn tải là thành công. Giá trị của độ trung thực trung bình F_{av} luôn lớn hơn 0.5 với điều kiện $0 \leq k \leq 0.5$. Độ trung

thực càng ổn định và tiến gần đến lý tưởng trong trường hợp k nhỏ và $|\alpha|$ lớn.



Hình 3: Đồ thị của độ thực trung bình F_{av} phụ thuộc vào biên độ kết hợp $|\alpha|$ trong trường hợp $k=0.01$, $k=0.1$ và $k=0.2$

4. Kết luận

Sau khi đưa ra trạng thái thêm ba bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ, chúng tôi đã tiến hành kiểm tra tính chất đan rối, định lượng mức độ đan rối và sử dụng trạng thái này vào quá trình viễn tải lượng tử từ đó chúng tôi đã thu được một số kết quả quan trọng như sau.

Trạng thái này bị rối theo tiêu chuẩn đan rối bậc cao của Hillery – Zubairy trong một số miền khá hẹp của biên độ kết hợp tại các vị trí mà biên độ kết hợp khá bé. Độ rối của trạng thái này có thể đạt

trên 90% theo tiêu chuẩn Concurrence khi chúng ta chọn các tham số phù hợp.

Quá trình viễn tải trạng thái này cũng phụ thuộc vào tham số chúng ta đưa vào, nếu chọn tham số phù hợp thì quá trình viễn tải sẽ thành công. Qua khảo sát chúng tôi nhận thấy quá trình viễn tải lượng tử rất thành công với độ thực trung bình cao và tiến gần đến giá trị lí tưởng khi chọn giá trị tham số k bé và $|\alpha|$ lớn. Như vậy trạng thái thêm ba bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ có thể được dùng làm nguồn rối trong quá trình viễn tải lượng tử.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sudarshan. E. C. G. (1963), "Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams", *Physical review letters*, 10, 277.
2. Glauber. R. J. (1963), "Coherent and Incoherent States of the Radiation Field", *Physical Review*, 131, 2766.
3. Dodonov V. V., Malkin I.A. and Manko V. I. (1974), "Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator", *Physica*, 72, 597.
4. Agarwal. G. S. and Tara. K. (1991), "Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state", *Physical Review A*, 43, 492.
5. Yang Y. and Fu-Li L., (2009), "Entanglement properties of non-Gaussian resources generated via photon subtraction and addition and continuous-variable quantum-teleportation improvement", *Physical Review A*, 80, 022315.
6. Hoai N. T. X. and Duc T. M. (2016), "Nonclassical properties and teleportation in the two-mode photon-added displaced squeezed states" *International Journal of Modern Physics B*, 30, 1650032.
7. Hillery M. and Zubairy M. S. (2006), "Entanglement conditions for two-mode states: Applications", *Physical Review A*, 74, 032333.
8. Braunstein S. L. and Kimble H. J. (1998), "Teleportation of Continuous Quantum Variables", *Physical Review Letters*, 80, 869.
9. Dat. T. Q., Duc. T. M. and Chuong H. S., (2018), "Improvement quantum teleportation via the pair coherent states", *Journal of Physics: Conference Series*, 1034, 012004.
10. Gabris A. and Agarwal G. S. 2007, "Quantum teleportation with pair-coherent states", *International Journal of Quantum Information*, 5, 17.

**INVESTIGATING ENTANGLEMENT AND QUANTUM TELEPORTATION
WITH THREE-PHOTON ADDED AND SINGLE-PHOTON SUBTRACTED
TWO-MODE ODD COHERENT STATES****ABSTRACT**

In this paper, we propose the three-photon added and single-photon subtracted two-mode odd coherent states. And then, we investigate the entanglement and quantitate the entanglement degree of the states according to the high-order entanglement condition of Hillery-Zubairy and the concurrence criterion. Next, we use the states as an entanglement source in quantum teleportation process and evaluate the average fidelity of this process. The results show that the states are entangled and the entanglement degree can reach over 90%. Moreover, the average fidelity of the quantum teleportation process is approximately ideal when the selected parameters are appropriate.

Keywords: *High-order entanglement conditions of Hillery-Zubairy, Concurrence criterion, quantum teleportation, average fidelity, quantitate entanglement degree*

(Received: 2/7/2020, Revised: 15/7/2020, Accepted for publication: 21/7/2020)