

NGHIÊN CỨU TÍNH CHẤT ĐƠN RỜI VÀ VIỆN TẢI LƯỢNG TỬ VỚI TRẠNG THÁI HAI MODE KẾT HỢP SU(1, 1) THÊM HAI VÀ BỚT MỘT PHOTON LẺ

*Bùi Thị Như Nga¹
Trương Minh Đức¹
Hồ Sỹ Chương²*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu tính chất đơn rời của trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon lẻ bằng sử dụng tiêu chuẩn đơn rời Hillery-Zubairy và định lượng độ rời bằng tiêu chuẩn Entropy tuyến tính. Kết quả khảo sát cho thấy trạng thái này là trạng thái đơn rời mạnh và mức độ đơn rời phụ thuộc vào việc thêm và bớt photon lên hai mode kết hợp SU(1, 1) lẻ. Khi sử dụng trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon lẻ làm nguồn đơn rời để thực hiện quá trình viễn tải một trạng thái kết hợp, chúng tôi nhận thấy rằng quá trình viễn tải lượng tử được thực hiện thành công với độ trung thực trung bình F_{av} nằm trong khoảng từ 0,5 đến 1.

Từ khóa: *Trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1), tiêu chuẩn đơn rời Hillery-Zubairy, tiêu chuẩn đơn rời Entropy tuyến tính, độ trung thực trung bình và quá trình viễn tải lượng tử*

1. Mở đầu

Cùng với sự phát triển của khoa học - kỹ thuật, lĩnh vực thông tin liên lạc cũng không ngừng phát triển. Con người không ngừng cải tiến cách thức truyền thông tin từ nơi này sang nơi khác mà vẫn đảm bảo tính chính xác, bảo mật. Vấn đề làm thế nào để truyền tín hiệu lượng tử đi xa mà vẫn đảm bảo tính lọc lựa cao và giảm được các thăng giáng lượng tử đến mức thấp nhất đang đặt ra cấp thiết cho các nhà vật lý lý thuyết cũng như thực nghiệm.

Glauber và Sudarshan [1], [2] đã đề

$$|\Psi\rangle_{ab} = N(\hat{a}^{+2} + \hat{b})(|\psi\rangle_{ab} - |-\psi\rangle_{ab}), \quad (1)$$

trong đó $|\psi\rangle_{ab}$ là trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) được Perelomov A. M. đưa ra năm 1972 [4], \hat{a}^+ (\hat{a}) và \hat{b}^+ (\hat{b}) là toán tử sinh (hủy) photon của mode a và mode

xuất ra trạng thái kết hợp vào năm 1963, ký hiệu là $|\alpha\rangle$. Đây là trạng thái ứng với thăng giáng lượng tử nhỏ nhất suy ra từ hệ thức bất định Heisenberg. Vào năm 1991, Agarwal và Tara [3] đã đề xuất ý tưởng về trạng thái kết hợp thêm photon, và việc thêm và bớt photon vào một trạng thái vật lý là một phương pháp quan trọng để tạo ra một trạng thái phi cổ điển mới. Trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon lẻ được định nghĩa như sau:

¹Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế

Email: tmduc2009@gmail.com

²Trường Đại học Đồng Nai

$$N = \left[(1 - |\xi|^2)^{1+q} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!} \right] \left[1 - (-1)^n \right]^2 \xi^{2n} \times [n + (n+q+1)(n+q+2)] \right]^{-1/2}. \quad (2)$$

Trong biểu diễn các trạng thái Fock, trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) có dạng:

$$|\pm \psi\rangle_{ab} = (1 - |\xi|^2)^{\frac{1+q}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!} \right]^{1/2} (\pm \xi)^n |n+q, n\rangle_{ab}. \quad (3)$$

Từ đó, trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon lẻ có dạng như sau:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{ab} = & \left[(1 - |\xi|^2)^{1+q} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!} \right] \left[1 - (-1)^n \right]^2 \xi^{2n} \times [n + (n+q+1)(n+q+2)] \right]^{-1/2} \\ & \times (1 - |\xi|^2)^{\frac{1+q}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!} \right]^{1/2} \left[1 - (-1)^n \right] \xi^n \\ & \times \left\{ \sqrt{n+q+2} \sqrt{n+q+1} |n+q+2\rangle_a |n\rangle_b + \sqrt{n} |n+q\rangle_a |n-1\rangle_b \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Việc truyền tải thông tin thông qua sử dụng tính chất đan rối được gọi là viễn tải lượng tử. Viễn tải lượng tử là một quá trình dịch chuyển thông tin cũng như vật chất một cách tức thời, mà không phải dịch chuyển qua không gian. Quá trình này được thực hiện bằng cách giải mã một thông tin ở địa điểm này rồi gửi thông tin tới địa điểm khác, nơi thông tin sẽ được tái tạo lại cấu trúc ban đầu. Viễn tải lượng tử có thể được khai thác để làm cho máy tính lượng tử, mạng lưới viễn thông trở nên nhanh, mạnh và bảo mật hơn. Để nghiên cứu viễn tải lượng tử, các nhà khoa học đang tập trung khai thác rối lượng tử và việc nghiên cứu tính chất đan rối đóng vai trò quan trọng trong quá trình tạo ra nguồn tài nguyên rối từ đó tìm ra nguồn

rối có độ trung thực trung bình cao nhất. Nhận thấy các khảo sát về trạng thái đan rối và viễn tải lượng tử là một vấn đề thú vị, vì vậy trong bài báo này chúng tôi tiến hành định lượng độ rối và viễn tải lượng tử với trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon lẻ.

2. Nghiên cứu tính chất đan rối và định lượng độ rối của trạng thái hai mode kết hợp SU(1,1) thêm hai và bớt một photon lẻ

Đầu tiên chúng tôi nghiên cứu tính đan rối của trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon lẻ theo tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy [5]. Điều kiện đan rối tổng quát được biểu diễn bằng bất phương trình sau:

$$\left| \left\langle (\hat{a}^+)^m (\hat{b}^+)^n \right\rangle \right|^2 > \left\langle (\hat{a}^+)^m (\hat{a})^m \right\rangle \left\langle (\hat{b}^+)^n (\hat{b})^n \right\rangle. \quad (5)$$

Theo Hillery-Zubairy thì một trạng thái bất kỳ bị đan rối nếu trung bình trong trạng thái đó thỏa mãn bất đẳng thức (5). Nếu $m = n$ thì trị trung bình ở vế trái trong biểu thức ứng với trạng thái SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon

lẽ bằng không, trong khi vế trái luôn không âm. Do vậy không có tính đan rối trong trường hợp này. Khi $m = n$, đặt $n = 2k$ (chọn $k = 1$) và đưa vào tham số đan rối R_1 dưới dạng:

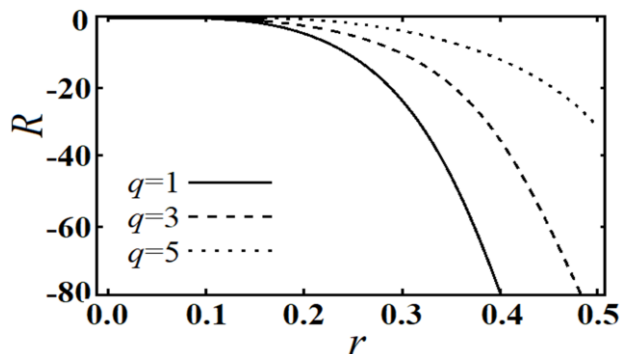
$$R_1 = \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle \langle \hat{b}^+ \hat{b} \rangle - \left| \langle \hat{a}^+ \hat{b}^+ \rangle \right|^2. \quad (6)$$

Trạng thái đan rối nếu $R_1 < 0$ và R_1 càng âm thì mức độ đan rối càng tăng, còn ngược lại nếu $R_1 > 0$ thì trạng thái đó không đan rối. Khi tính

trung bình trong trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon lẽ ta có:

$$\begin{aligned} R &= |N|^4 \left(1 - |\xi|^2\right)^{2(1+q)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+q)!}{n!q!} \right)^2 \left[1 - (-1)^n\right]^4 |\xi|^{4n} \\ &\times \left[(n+q+1)^2 (n+q+2)^2 + n(n+q)(n+q-1) \right] \\ &\times \left[n(n-1)(n+q+1)(n+q+2) + n(n-1)(n-2) \right] \\ &- |N|^4 \left(1 - |\xi|^2\right)^{2(1+q)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+q)!}{n!q!} \right)^2 \left[1 - (-1)^n\right]^4 |\xi|^{4n} |\xi^2|^2 \\ &\times \left[(n+q+1)(n+q+2)(n+q+3)(n+q+4) + n(n+q+1)(n+q+2) \right]^2, \end{aligned} \quad (7)$$

với hệ số chuẩn hóa N được đưa ra trong biểu thức (2). Trong phương trình trên $\xi = -\tanh(\theta/2) \exp(-i\varphi)$. Để thuận tiện cho quá trình khảo sát tính đan rối, chúng tôi chọn các thông số $\varphi = \pi; \theta = 2r; r \geq 0$, ta được $\xi = \tanh r$.



Hình 1: Sự phụ thuộc của tham số đan rối R vào r với giá trị $q = 1$ (đường liền nét), $q = 3$ (đường đứt nét), $q = 5$ (đường chấm chấm)

Đồ thị cho thấy $R < 0$ với mọi giá trị của r và q , nghĩa là điều kiện đan rối luôn thỏa mãn. Vậy trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon lẻ là trạng thái rối hoàn toàn. Hơn nữa, các đường cong đi xuống cho thấy mức độ đan rối tăng mạnh khi r tăng. Khi xét các giá trị tham số k và q phù hợp thì trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon lẻ đan rối hoàn toàn theo tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy, nên trạng thái này có thể làm nguồn đan rối cho quá trình viễn tải lượng tử. Tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy chỉ như là điều kiện đủ khi đánh giá độ đan rối, do đó chúng ta cần kiểm tra lại các kết quả trên bằng một phương

pháp khác độc lập với cách trên.

Để đánh giá cấp độ đan rối của trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon lẻ, ta sử dụng tiêu chuẩn Entropy tuyến tính [6]:

$$E_{lin} = 1 - Tr(\hat{\rho}_a^2), \quad (8)$$

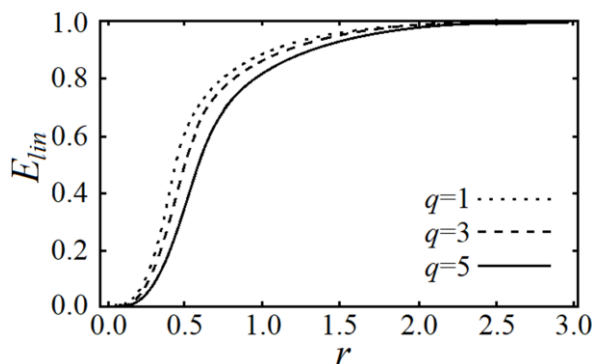
trong đó $Tr(\hat{\rho}_a^2)$ là phép lấy vết ma trận mật độ rút gọn bình phương. Một trạng thái đan rối càng mạnh nếu $E_{lin}=1$, trường hợp $E_{lin}=0$ tương ứng với trạng thái không đan rối. Xét trong trường hợp tổng quát, ma trận mật độ $\hat{\rho}$ của trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon lẻ có dạng:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |\Psi\rangle_{ab\ ba} \langle\Psi| \\ &= |N|^2 (1-|\xi|^2)^{1+q} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!} \right]^{1/2} [1-(-1)^n] \xi^n \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(m+q)!}{m!q!} \right]^{1/2} [1-(-1)^m] \xi^{*m} \\ &\times \left\{ \sqrt{n+q+2} \sqrt{n+q+1} |n+q+2, n\rangle_{ab} + \sqrt{n} |n+q, n-1\rangle_{ab} \right\} \\ &\times \left\{ {}_{ba} \langle m, m+q+2 | \sqrt{m+q+1} \sqrt{m+q+2} + {}_{ba} \langle m-1, m+q | \sqrt{m} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Từ đó suy ra Entropy tuyến tính của trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon lẻ có dạng:

$$\begin{aligned} E_{lin} &= 1 - Tr(\hat{\rho}^2)_a \\ &= 1 - |N|^4 (1-|\xi|^2)^{2(1+q)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+q)!}{n!q!} \right)^2 (1-(-1)^n)^4 |\xi|^{4n} \\ &\times ((n+q+1)^2 (n+q+2)^2 + 2n(n+q+1)(n+q+2) + n^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Để thuận tiện cho việc khảo sát biểu thức ta chọn các thông số $\varphi=\pi, \theta=2r, r \geq 0$, ta được $\xi = \tanh r$. Ta có đồ thị chỉ ra sự phụ thuộc của M vào r như hình 2.



Hình 2: Sự phụ thuộc của tham số M vào r với giá trị $q=5$ (đường liền nét), $q = 3$ (đường đứt nét), $q = 1$ (đường chấm chấm)

Kết quả đồ thị hình 2 cho thấy trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon lẻ là một trạng thái đan rối. Khi biên độ r càng lớn thì mức độ đan rối càng tiến nhanh về 1 điều này chứng tỏ mức đan rối đạt cực đại ($E_{lin}=1$) nếu ta chọn các thông số phù hợp và thỏa mãn điều kiện đan rối để thực hiện nhiệm vụ viễn tải lượng tử. Như vậy, ở phần này chúng tôi thấy rằng trạng thái hai mode kết hợp SU(1,1) thêm hai và bớt một photon lẻ đan rối theo tiêu chuẩn Hillery-Zubairy bậc cao. Mặt khác, khi tiến hành định lượng độ rối trạng thái hai mode kết hợp SU(1,1) thêm hai và bớt một photon lẻ

bằng tiêu chuẩn Entropy tuyến tính thì nó hoàn toàn phù hợp tính đan rối nhằm khẳng định thêm trạng thái hai mode kết hợp SU(1,1) thêm hai và bớt một photon lẻ là trạng thái đan rối mạnh có thể làm nguồn rối cho quá trình viễn tải lượng tử ở phần sau.

3. Quá trình viễn tải lượng tử với trạng thái hai mode kết hợp SU(1,1) thêm hai và bớt một photon lẻ

Để thực hiện quá trình viễn tải lượng tử một trạng thái kết hợp theo mô hình tọa độ xung lượng [7], chúng ta sử dụng nguồn đan rối là trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon lẻ như sau:

$$|\Psi\rangle_{ab} = N(1-|\xi|^2)^{\frac{1+q}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!} \right]^{1/2} [1-(-1)^n] \xi^n \times \left\{ \sqrt{n+q+2}\sqrt{n+q+1} |n+q+2\rangle_a |n\rangle_b + \sqrt{n} |n+q\rangle_a |n-1\rangle_b \right\}, \quad (11)$$

trong đó N là hệ số chuẩn hóa đã đưa ra trong biểu thức (2). Sau đó, Alice dùng một phép đo trạng thái Bell tổ hợp hai

mode a và c để đo thông tin về mức độ đan rối giữa $|\Psi\rangle_{ab}$ và $|\gamma\rangle_c$ dựa trên hai mode a và c .

$$\begin{aligned}
|B(X, P)\rangle_{ac} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{D}_c(\beta) |k, k\rangle_{ac} \\
{}_{ac}\langle B(X, P)| &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} {}_{ac}\langle k, k | \hat{D}_c^+(\beta).
\end{aligned} \tag{12}$$

Khi phép đo tổ hợp hoàn tất, trạng thái tích $|\Psi\rangle_{abc}$ sụp đổ. Do Bob và Alice cùng chia sẻ trạng thái rối nên Bob có trạng thái dưới dạng:

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle_{abc,B} &= {}_{ac}\langle B(X, P)|\Psi\rangle_{abc} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times N(1-|\xi|^2)^{\frac{1+q}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!} \right]^{1/2} [1-(-1)^n] \xi^n \\
&\times \left\{ \sqrt{n+q+2} \sqrt{n+q+1} {}_{ac}\langle k, k | \hat{D}_c^+(\beta) |n+q+2\rangle_a |n\rangle_b \right. \\
&\left. + \sqrt{n} {}_{ac}\langle k, k | \hat{D}_c^+(\beta) |n+q\rangle_a |n-1\rangle_b \right\} |\gamma\rangle_c.
\end{aligned} \tag{13}$$

Bây giờ, bên Bob tồn tại trạng thái ứng với mode b chứa các thông tin về mode c . Trạng thái cuối cùng thu được trong quá trình viễn tải đó là:

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle_{abc,out} &= \hat{D}(g\beta) |\Psi\rangle_{abc,B} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times N(1-|\xi|^2)^{\frac{1+q}{2}} \exp\left(\frac{\beta^* \gamma - \beta \gamma^*}{2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} |\gamma - \beta|^2\right) \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!} \right]^{1/2} [1-(-1)^n] \xi^n \left\{ \frac{(\gamma - \beta)^{n+q+2}}{\sqrt{n+q+2}!} \sqrt{n+q+2} \sqrt{n+q+1} \hat{D}(g\beta) |n\rangle_b \right. \\
&\left. + \frac{(\gamma - \beta)^{n+q}}{\sqrt{n+q}!} \sqrt{n} \hat{D}(g\beta) |n-1\rangle_b \right\}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Quá trình viễn tải lúc này đã hoàn thành, để đánh giá mức độ thành công của quá trình viễn tải chúng ta dựa vào độ trung thực trung bình Fav mà chúng tôi đưa ra ở phần tiếp theo.

4. Độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải lượng tử

Độ trung thực trung bình trong quá trình viễn tải được xác định qua biểu thức:

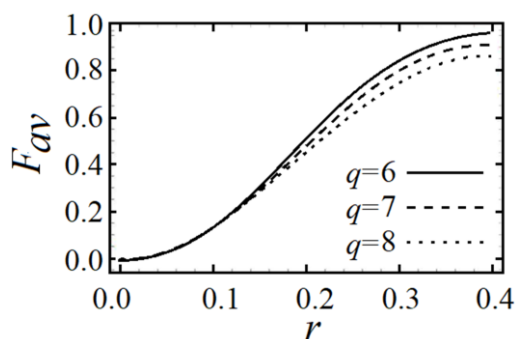
$$\begin{aligned}
F_{av} &= \int |{}_{in}\langle \Psi | \Psi \rangle_{out}|^2 d^2 \beta \\
&= \int |\langle \gamma | \Psi \rangle_{out}|^2 d^2 \beta.
\end{aligned} \tag{15}$$

Quá trình viễn tải thành công nếu thỏa mãn điều kiện $1/2 \leq F_{av} \leq 1$,

trong đó quá trình viễn tải là hoàn hảo nếu $F_{av} = 1$. Để thuận tiện cho việc khảo sát biểu thức (15) ta chọn các

thông số $\varphi=\pi, \theta=2r, r \geq 0$, với $\xi = \tanh r$ và $n=2k+1$, ta có:

$$F_{av} = 16|N|^2 (1 - (\tanh r)^2)^{1+q} \exp(-|\gamma|^2) \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1+q)!}{(2k+1)!q!} (\tanh r)^{2(2k+1)} \left\{ \frac{|\gamma|^{2(2k+1)}}{(2k+1)!} (2k+q+3)(2k+q+2) + \frac{|\gamma|^{4k}}{\gamma \xi^2 (2k+1)!} (2k+1)^2 2k + \frac{|\gamma|^{2(2k+1)} \gamma \xi^2 (2k+q+3)(2k+q+2)}{(2k+1)! 2k+2} + \frac{|\gamma|^{4k} (2k+1)^2}{(2k+1)!} \right\}. \quad (16)$$



Hình 3: Sự phụ thuộc của F_{av} vào r với giá trị $q = 6$ (đường liền nét), $q = 7$ (đường đứt nét), $q = 8$ (đường chấm chấm)

Đồ thị hình 3 cho ta thấy nếu các giá trị của tham số q được chọn phù hợp thì F_{av} nằm trong khoảng $0,5 < F_{av} < 1$, tức là quá trình viễn tải lượng tử một trạng thái kết hợp đã diễn ra thành công.

5. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy bậc cao và tiêu chuẩn Entropy tuyến tính để khảo sát tính đan rối của trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon lẻ. Kết quả khảo sát cho thấy vai trò của việc thêm và bớt photon vào trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) lẻ rất quan trọng và trạng thái mới được tạo ra là một trạng thái đan rối hoàn toàn. Sau đó, chúng

tôi sử dụng trạng thái hai mode kết hợp SU(1, 1) thêm hai và bớt một photon lẻ làm nguồn đan rối để thực hiện viễn tải lượng tử một trạng thái kết hợp và đánh giá mức độ thành công của quá trình viễn tải thông qua độ trung thực trung bình. Kết quả khảo sát cho thấy quá trình viễn tải lượng tử một trạng thái kết hợp là thành công với độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải nằm trong khoảng $0,5 < F_{av} < 1$ tương ứng với biên độ kết hợp r bé. Tuy nhiên, với biên độ kết hợp r lớn thì độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải là tương đối bé và phụ thuộc nhiều vào các tham số đưa vào.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Glauber. R. J (1963), “Coherent and Incoherent States of the Radiation Field”, *Phys. Rev.*, 96, 2766.
2. Shudarshan. E. C. G (1963), “Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams”, *Phys. Rev. Lett*, 10, 277
3. Agarwal. G. S. and Tara. K. (1991), “Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state”, *Physical Review A*, 43, 492
4. Perelomov. A. M. (1972), “Coherent states for arbitrary Lie groups”, *Commun. Math. Phys*, 26, 222
5. Hillery M. and Zubairy M.S. (2016), “Entanglement conditions for two-mode states”, *Phys. Rev. Lett*, 96, 050503
6. Agarwal G. S. and Biswas A. (2005), “Quantitative measures of entanglement in pair-coherent states”, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 7, 350
7. Gasbris A., Agarwal G. S. (2007), “Quantum teleportation with pair-coherent states”, *Int. Journal of Quant. Inf.*, 5, 17

**INVESTIGATING THE ENTANGLEMENT AND THE QUANTUM
TELEPORTATION VIA SUPERPOSITION OF TWO-PHOTON
ADDED AND ONE-PHOTON SUBTRATED TWO-MODE SU(1,1)
ODD COHERENT STATE**

ABSTRACT

In this paper, by using the Hillery-Zubairy and the Linear Entropy criteria, we investigate the entanglement property of the superposition of two-photon added and one-photon subtracted to two-mode SU(1, 1) odd coherent state. The results show that the degree of the entanglement of this state depends on the adding and subtracting photons to the odd two-mode SU(1, 1) coherent state and this state is strongly entangled. We found that the teleportation process for quantum teleportation was successful with the fidelity ranging from 0.5 to 1 by using the superposition of two-photon added and one-photon subtracted to two-mode SU(1, 1) odd coherent state as an entanglement resource.

Keywords: *Two-mode SU(1,1) odd coherent state, Hillery-Zubairy criterion, linear Entropy criterion, entanglement and teleportation*

(Received: 25/11/2019, Revised: 2/12/2019, Accepted for publication: 3/12/2019)